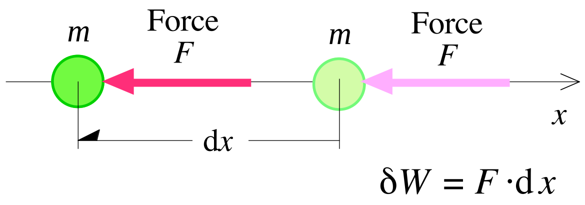
仕事 Work の定義

ある物体に力 F [N]=[kg·m·s-2] が加わり，力の加わっている方向に距離 dx [m] だけ移動したとき，その力 F によってなされた仕事は $\delta W = F \cdot \mathrm{d}x$ [N·m]=[J] =[kg·m2·s-2] と定義される．これを下図に示す．この表現では，物体の質量 m [kg] そのものは直接には関係しない．



ニュートンの運動方程式は加速度を α [m·s-2] として $F = m \cdot \alpha$ である．力 F はこの式で定義されており，次元 Dimension や SI 単位もそれに沿っている．時間を t [s]，距離を x [m]，速度を w とすると，速度は $w = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ [m/s]，加速度は $\alpha = \mathrm{d}w/\mathrm{d}t = \mathrm{d}(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)/\mathrm{d}t$ である．

＊ 速度 Velocity には v を使いたいところだが，熱力学では v は比容積を表すので，その替わりに w を用いる．

質量 m [kg] の質点 (物体) がある高さから，重力に引っ張られて距離 z [m] だけ落下したときに重力によってなされた仕事は，重力加速度 $g = 9.81$ m/s2 のもとで，

$$W = E_{\mathrm{P}} = m \cdot g \cdot z \quad [\mathrm{N \cdot m}]=[\mathrm{J}]=[\mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}}]$$

である．この質量 m [kg] の質点を逆に z [m] だけ持ち上げるに必要なエネルギーと同等であるから，これは重力によってなされる位置エネルギー Potential Energy, E_{P} である．

ばね定数 k N/m のばねにおいて，釣り合っている状況に x m だけ変形を与えたとき，ばねに蓄えられる位置エネルギーは，

$$E_{\mathrm{P}} = \frac{1}{2}kx^2 \quad [\mathrm{N \cdot m}]=[\mathrm{J}]=[\mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}}]$$

である．

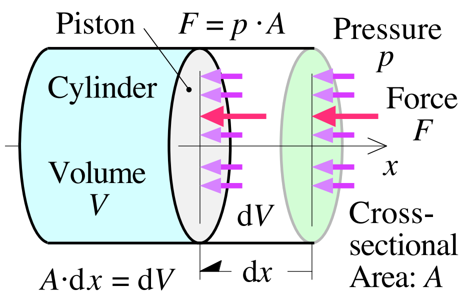
容積仕事　Volumetric Work

容積変化に伴って出入りする仕事のことである．変位仕事 Displacement Work, 絶対仕事 Absolute Work とも呼ばれる．容積仕事を絶対仕事と呼ぶのは，流動系の仕事を工業仕事 Technical Work というのと対にしてのことである．

往復ピストン式機関のようなシリンダを仮に考えて，そのシリンダ内にある気体が入っておりその質量は m [kg] であるとする．ピストンを介して外部から力 F [N]=[kg·m·s^{-2}] を加える．シリンダとピストンとのあいだに摩擦はなく，ピストンに質量はないとする．この様子を下図に示す．

＊ “ピストン式機関のようなシリンダを仮に考えて” とあるように，必ずしもピストンを持つシリンダを考えなければならないというわけではない．可動部の断面積が一定なので取り扱いが簡単であるからそれを採用するというに過ぎない．また，そこで “摩擦が無い”，“質量が無い” と設定することは容積仕事について，現実から遠ざかって架空の内容にするということではない．これで一般性のある説明になっていることを以下順次述べる．実際にピストン式機関の容積仕事を勘定するにもこれで差し支えない．“摩擦” については別途摩擦仕事を評価し，それを差し引けば軸仕事が得られるし，“ピストン質量” の効果は慣性力やサイドスラストなど，運動の問題であって，容積仕事に影響を与えるものではない．

ここで設定されている「系」とはシリンダとピストンで囲まれた空間にある質量 m の気体およびその空間である．シリンダおよびピストンの断面積を A [m^2] とすると，ピストンに加わる力は F なので，圧力 p は $p = F/A$, [Pa]=[N·m^{-2}]=[J·m^{-3}] =[kg·m^{-1}·s^{-2}] である．



$$\delta W = p \cdot \mathrm{d}V$$

力 F の作用でピストンは距離 dx [m] だけ押し込まれ，このとき外部から仕事 $\delta W = F \cdot \mathrm{d}x = p \cdot A \cdot \mathrm{d}x$ [N·m]=[J] が気体に与えられる．ピストンが dx 押し込まれて，気体の容積は $\mathrm{d}V = A \cdot \mathrm{d}x$ [m³] だけ小さくなった．すなわち，力 F [N] が付与されて，

$$\delta W = p\mathrm{d}V \qquad [\mathrm{N \cdot m}]=[\mathrm{J}]$$

の仕事が気体に加えられた．この変化過程では，距離 dx は十分小さくて，ピストンが押し込まれることによるシリンダ内気体の圧力上昇も十分小さいとして扱われる．

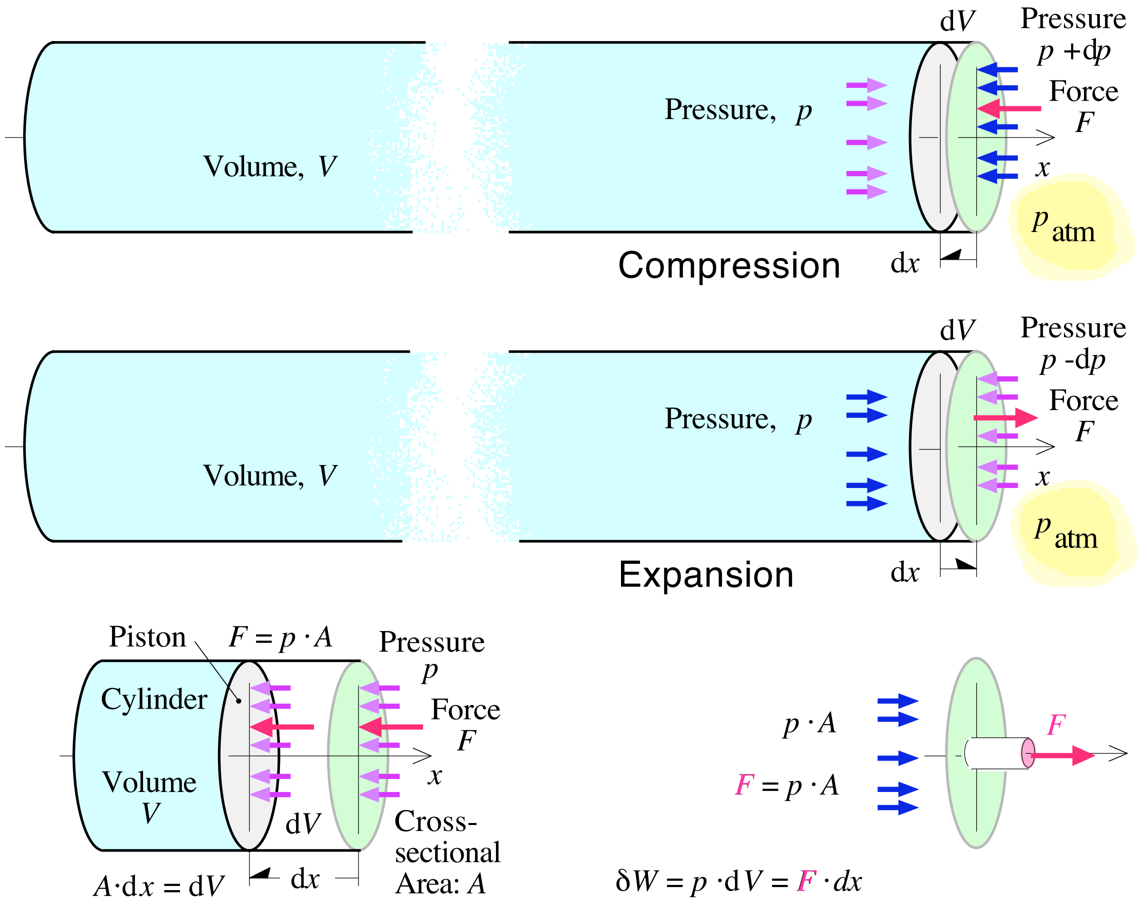
$\delta W = p\mathrm{d}V$ というかたちを得て，系にある気体の圧力と容積という状態 (p, V, T) を表す物理量だけで仕事が表現される．最初のシリンダやピストンといったものや，その形が円筒であるかどうか，断面積は一定かというような事柄から開放されて，一般性が得られたことにより，他へも自由に適用できるようになっている．

機械工学ではエネルギーが移動する方向の正負についての約束事があり，伝統的に「系」が外界に与える仕事 W を正に，外界から付与される熱 Q を正にとる．ここでは,「系」にある質量 m の気体に外界から仕事 δW が与えられている．そのとき距離 x は減り，$\mathrm{d}x < 0$ は負，負の dx とは圧縮されていることであり，容積が減少して $\mathrm{d}V < 0$ も負であって，仕事 $\delta W < 0$ が負になっている．圧力 p や断面積 A は負の値をとらず，正のみである．物理量それぞれの次元 Dimension と SI 単位についても留意することが大切である．

ピストンを介して流体に仕事 δW を加える状況で容積仕事 $W = p \cdot \mathrm{d}V$ を説明するにあたり，微分小容積 dV を圧縮後の容積 V と大差ないくらいに大きく描いたが，本来ならば下図のように，$\mathrm{d}V \ll V$ として描くべきものであった．

準静的過程が実現されるような気体の圧縮 Compression では，気体の圧力 p より微分小の圧力差 dp だけ高い圧力 (p＋dp)でピストンを押し込む必要がある．

逆に気体の膨張 Expansion により仕事 δW を外部に取り出す場合には，気体の圧力 p より微分小の圧力差 dp だけ低い圧力 (p−dp) がピストンに作用していなければならない．この様子もあわせて下図に示す．



このときピストンが移動する距離 dx の方向は正，d$x > 0$ であり，なされた仕事 δW 正，$\delta W > 0$ である．ピストン・シリンダ機構を考えているので，ピストンの裏側には大気圧 p_{atm} が作用しているだけではないかと考えてはならない．ピストンを考えるのは例えばの話であって，もともとは力 F を想定し，ピストン断面積 A との関係で $F/A = p$ となっているのだから，外界の圧力は $F/A = p$ であっても，決して大気圧 p_{atm} そのものではない．仮にピストン・シリンダの外側は真空ではなくて，大気圧 $p_{\mathrm{atm}} = 101.3$ kPa であったとしたら，ピストンから連接ロッドに伝わる力は $F' = \{(p - \mathrm{d}p) - p_{\mathrm{atm}}\} \cdot A$ となって，$F' < F$ であるというだけのことである．いずれにせよピストンは外界であって，それにかかる圧力は大気圧分も含めて $(p - \mathrm{d}p)$ である．ピストンが静止しているなら，もちろん外界の圧力は大気圧分も含めて p である．

容積仕事 $W = p{\cdot}\mathrm{d}V$ の圧力 p は外界の圧力なのか，系の中味である気体の圧力なのか，どちらかと問われれば外界の圧力と応えざるを得ない．それゆえか，p を p_{external} と書く書物も多い．しかし，準静的過程においては p を系の圧力，気体の圧力とみなしても差し支えない．

運動エネルギー Kinetic Energy

ニュートンの運動方程式は $F = m\cdot\alpha = m\cdot(\mathrm{d}w/\mathrm{d}t)$ であり，$\mathrm{d}x = w\cdot\mathrm{d}t$ であるから，速度 $w\,(t)$ が時刻によって変わる場合の仕事 W は

$$W = \int_{x_0}^{x} m\cdot\alpha\cdot\mathrm{d}x = \int_{t_0}^{t} m\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}w\mathrm{d}t = m\int_{w_0}^{w} w\mathrm{d}w$$

であり，これを初速度 $w_0 = 0$ として積分すれば，運動エネルギー E_{K} として

$$W = E_{\mathrm{K}} = \frac{1}{2}mw^2 \quad [\mathrm{N{\cdot}m}]=[\mathrm{J}]=[\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-2}}]$$

が得られる．これは質量 m kg のひとつの系が速度 w m/s で並進運動するとき，その系が持つ運動エネルギーである．

慣性モーメント I kg·m^2 の系が重心まわりに角速度 ω rad/s で回転するときの運動エネルギーは，

$$E_{\mathrm{K}} = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad [\mathrm{N{\cdot}m}]=[\mathrm{J}]=[\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-2}}]$$

である．

* 運動エネルギーは Kinetic Energy からの訳語であり，Kinematic Energy ではないが，Kinematic Energy という語彙も使われていないわけではない．区別して使われているのかどうかは明確でない．ジーニアス大英和辞典では “kinetic”「物理運動学に関する，運動によって起こる」，“kinematic”「物理運動学上の」となっている．http://vesuvius.jsc.nasa.gov/er/seh/k.html などを参照されたい．